

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА  
ЛАЗЕРНОГО СЖАТИЯ МИШЕНИ,  
НАХОДЯЩЕЙСЯ ВО ВНЕШНЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ**

© 2017 г. *В.В. Кузенов<sup>1,2</sup>, С.В. Рыжков<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

<sup>2</sup>Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН

svryzhkov@bmstu.ru, vik.kuzenov@gmail.com

Работа поддержана Министерством образования и науки Российской Федерации (госзадание № 13.5240.2017/БЧ).

Приведена математическая модель процесса сжатия цилиндрически-симметричной термоядерной мишени. Рассматривается численный метод повышенного порядка точности, используемый для расчета основных физических процессов, протекающих в плазме мишени при наложении на неё внешнего магнитного поля.

Ключевые слова: магнитно-инерциальный термоядерный синтез, лазерный драйвер, неоднородные электрические и магнитные поля, замагниченная плазма, разработка численных методов.

**NUMERICAL MODELING OF LASER TARGET COMPRESSION  
IN AN EXTERNAL MAGNETIC FIELD**

*V.V. Kuzenov<sup>1,2</sup>, S.V. Ryzhkov<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>Bauman Moscow State Technical University

<sup>2</sup>Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS

The simplified one-dimensional mathematical model of the processes of compression of thermonuclear targets for MIF centrally symmetric coordinate system is presented. A method for high order that is used in the calculation of the basic physical processes occurring in the target plasma by applying an external magnetic field is considered.

Key words: magneto-inertial confinement fusion, laser driver, inhomogeneous electric and magnetic fields, magnetized plasma, development of numerical methods.

**1. Введение**

Экспериментальное изучение термоядерной плазмы должно сопровождаться построением многоуровневых радиационно-газодинамических вычислительных моделей, которые адекватно описывают процессы в активной зоне импульсного термоядерного реактора. Таким образом, расчетно-теоретические методы являются важным элементом в процессе разработки концепции магнитно-инерциального термоядерного синтеза (МИТС) [1-3]. Напомним, что система МИТС представляет собой импульсную термоядерную установку, в которой цилиндрически или сферически симметричная термоядерная ми-

шень, помещенная в затравочное (внешнее) магнитное поле, сжимается (вместе с затравочным магнитным потоком) мощными лазерными пучками или всеми видами оболочек, включая газовые, жидкостные и металлические ударники, плазменными лайнерами, образованными слиянием высокоскоростных плазменных струй, и т.д. Здесь отметим, что в [3] авторами даны первоначальные оценки теплофизических параметров плазмы, энергетических затрат на сжатие электромагнитного поля и работу вихревых токов. Очевидно, разрабатываемые математические модели и методы вычислительной плазмодинамики мишеней МИТС требуют в этом случае обязательной верификации на основе сравнения с надежными расчетными данными и данными физического эксперимента.

## 2. Постановка задачи

В общем случае предметом исследований в МИТС являются пространственные течения излучающей плазмы мишени при наличии тепломассообмена, электромагнитных полей и ядерных реакций. Решение данных задач предполагает использование сложных плазмодинамических математических моделей, описывающих процессы, протекающие в термоядерной плазме, а также создание высокоточных численных методов их решения, которые позволяют проводить адекватное численное моделирование. При этом первоначальное изучение основных физических закономерностей, присущих МИТС, целесообразно основывать на системе упрощенных одномерных математических моделей.

**2.1. Математическая модель.** Произведем описание математической модели процесса сжатия термоядерных мишеней МИТС для центрально-симметричной системы координат. Математическая модель мишеней МИТС, представленная в данной работе, опирается на одномерные уравнения радиационной плазмодинамики: систему уравнений Эйлера (1), уравнение переноса собственного широкополосного излучения (2), уравнение магнитной индукции (3), уравнение переноса лазерного излучения, методы расчета уравнений состояний вещества и коэффициентов поглощения лазерного излучения, определяет условия возникновения и протекания самоподдерживающейся термоядерной реакции синтеза:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^{(v-1)}} \frac{\partial (r^{(v-1)} \rho u)}{\partial r} = F_\rho, \quad F_\rho = -\rho u \frac{(v-1)}{r}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial t} + \frac{1}{r^{(v-1)}} \frac{\partial (r^{(v-1)} (\rho u^2 + P))}{\partial r} = F_{\rho u} + f_r, \quad F_{\rho u} = -(\rho u^2 - P) \frac{(v-1)}{r}, \quad f_r = \frac{1}{c} [\mathbf{j} \times \mathbf{H}]_r,$$

$$\frac{\partial (\rho E)}{\partial t} + \frac{1}{r^{(v-1)}} \frac{\partial (r^{(v-1)} (\rho E u + P u + q_\Sigma))}{\partial r} = F_E + q_r + Q_{Fus}^e, \quad q_r = j_r E_r, \quad q_\Sigma = q_e + q_i + q_{\text{лаз}},$$

$$F_E = -(\rho E u + P u) \frac{(v-1)}{r}, \quad P = P_e + P_i,$$

где  $t$  – время,  $r$  – радиальная координата,  $\rho$  – плотность,  $u$  – скорость вдоль координаты  $r$ ,  $P = P(\rho, \varepsilon)$  – статическое давление,  $\varepsilon$  – удельная внутренняя энергия,  $E = (\varepsilon + u^2 / 2)$  – полная энергия потока газа,  $\mathbf{F} = (F_\rho, F_{\rho u}, F_E)$  – вектор источников в ортогональной сис-

теме координат,  $F_\rho$  – плотность потока массы,  $F_{\rho u}$  – плотность потока импульса,  $F_E$  – плотность потока энергии,  $q, q_\nu$  – полный и спектральный поток излучения,  $T_e, T_i$  – температуры электронов и ионов плазмы ( $T = T_e = T_i$ ),  $\chi_\nu$  – спектральный коэффициент поглощения,  $f_r$  – электромагнитная сила,  $q_r$  – приток энергии от электромагнитного поля,  $q_e = -\lambda_e \text{grad} T_e$ ,  $q_i = -\lambda_i \text{grad} T_i$ ,  $q_{\text{лаз}}$  – поток лазерного излучения,  $\lambda_e, \lambda_i$  – коэффициенты теплопроводности электронов и ионов,  $j_r$  – плотность тока,  $\mathbf{H}(r)$  – вектор магнитной индукции,  $P_e$  – давление электронов,  $P_i$  – давление ионов, индекс  $\nu = (1, 2)$  – отвечает случаям плоской и осевой симметрии.

Вклад локального (термоядерного) энерговыделения  $Q_{Fus}^e$  в электронный компонент плазмы за счет передачи энергии электронам от термоядерных  $\alpha$ -частиц может быть определен с помощью приближенной формулы [4]:

$$Q_{Fus}^e = 8.483 \cdot 10^{29} \rho^2 \frac{(1 + 0.232 \cdot T_i^{3/4}) \exp(-20/T_i^{1/3})}{T_i^{2/3} \sqrt{1 + 9.41 \cdot 10^{-5} \cdot T_i^{13/4}}} [\text{Эрг}/(\text{см}^3 \cdot \text{с})],$$

где температура задается в кэВ, а плотность – в г/см<sup>3</sup>.

Перенос широкополосного излучения может рассматриваться с помощью многогруппового диффузионного приближения, уравнения которого выглядят следующим образом [5]:

$$\frac{1}{r^n} \frac{d(r^n q_\nu)}{dr} + \chi_\nu c U_\nu = \chi_\nu 4\sigma T^4, \quad \frac{c}{3} \frac{dU_\nu}{dr} + \chi_\nu q_\nu = 0, \quad (2)$$

где  $q_\nu, U_\nu$  – спектральный поток и объемная плотность широкополосного излучения,  $c$  – скорость света,  $\nu$  – номер частотной группы,  $\chi_\nu$  – спектральный коэффициент поглощения,  $n = 0$  – плоский слой,  $n = 1$  – бесконечный одномерный цилиндр. Здесь под величиной  $q_\nu$  понимается радиационный поток в направлении оси  $r$ .

Уравнение магнитной индукции, учитывающее уравнение неразрывности для плотности  $\rho$  и закон сохранения вида  $\text{div}(\mathbf{H}) = 0$ , записывается следующим образом [6]:

$$\frac{\partial(B_z/\rho)}{\partial t} + \frac{1}{\mu J} \frac{\partial J(v B_z/\rho)}{\partial r} = \frac{c^2}{4\pi\mu\rho J r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{J r}{\sigma} \frac{\partial B_z}{\partial r} \right). \quad (3)$$

Электропроводность определяется по формуле Спитцера [7] с учетом возможной замагниченности плазмы:

$$\sigma(z) = 12.06 \times 10^{13} \cdot \frac{T^{3/2}}{\ln \Lambda} \cdot \frac{n_e}{\sum_i n_i z_i^2} \frac{1}{1 + (\Omega_e \tau_e)^2} [1/\text{с}],$$

где  $n_e, n_i$  – концентрации электронов и ионов (см<sup>-3</sup>),  $z_i$  – средний заряд ионов,  $\Omega_e = e|\mathbf{B}|/m_e c$  – гирочастота электронов,  $m_e$  и  $M_i$  – массы электрона и иона соответственно.

Коэффициенты электронной и ионной теплопроводности  $\lambda_{e,i}$  в случае замагниченной плазмы могут быть рассчитаны с помощью формул [8].

Параметры лазерного излучения вдоль оси  $r$  находятся на основе решения уравнения переноса лазерного излучения:

$$\frac{dq_{\text{лаз}}}{dz} - \chi_{\omega} q_{\text{лаз}} = 0. \quad (4)$$

При этом коэффициент поглощения  $\chi_{\omega}$  лазерного излучения определяется с использованием механизма континуального поглощения, обратного механизму тормозного излучения электронов в условиях локального термодинамического равновесия (ЛТР):

$$\chi_{\omega} = \begin{cases} \frac{4.97 g Z_i^2 n_i^{\Sigma} n_e^{\Sigma}}{n_c^2 \lambda^2 (kT_e)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{1 - n_e/n_c}}, & n_e < n_c, \\ \infty & n_e \geq n_c, \end{cases}$$

где  $\lambda$  – длина волны излучения лазера (мкм),  $kT_e$  – электронная температура (кэВ),  $g$  – фактор Гаунта [8,9].

Расчет входящих в данную систему уравнений термодинамических  $e(T, \rho)$ ,  $P(T, \rho)$  и оптических  $\chi_i(T, \rho)$  параметров рабочих сред проводился в рамках приближения ЛТР с использованием компьютерной системы ASTEROID, разработанной член-корр. РАН С.Т. Суржиковым [10,11], модели Томаса-Ферми с квантовыми и обменными поправками [12,13] и модели среднего заряда [14,15].

**2.2. Начальные условия.** Расчетная область и мишень МИТС состоят из центральной части и одного коаксиального слоя. Они имеют цилиндрическую форму со следующим диапазоном значений начальных параметров мишени и окружающей среды:

- центральная часть мишени (радиус ядра  $R_y = 0.05$  см) заполнена D-T смесью с плотностью  $\rho = 5 \cdot 10^{-2}$  г/см<sup>3</sup> и начальной температурой равной  $T = 297$  К. Она окружена коаксиальным слоем (наружный радиус  $R_c = 0.1$  см), состоящим из металла (Al) с плотностью  $\rho = 2.7$  г/см<sup>3</sup> и начальной температурой, равной  $T = 297$  К.
- расчетная область имеет внешний радиус  $r = l = 0.2$  см. При этом термодинамические параметры внешней разреженной окружающей среды (состоит из Ar) задаются значениями:  $T = 297$  К,  $\rho = 2.7 \cdot 10^{-3}$  г/см<sup>3</sup>.

Начальное значение напряженности  $\mathbf{H}(r)$  “затравочного” магнитного поля в разреженной окружающей среде составляет доли Тл. Спектральный поток и объемная плотность широкополосного излучения  $q_v, U_v$ , а также лазерный поток излучения  $q_{\text{лаз}}$  для  $r \in [0, l]$  в начальный момент времени  $t = 0$  равны нулю.

**2.3. Граничные условия.** В качестве граничных условий системы уравнений Эйлера (1) ставится условие симметрии (на оси симметрии), на внешней границе задаются невозмущающие условия на выходящий из расчетной области поток:  $\left. \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial r^2} \right|_{r=l} = 0$ , где

$$\mathbf{f} = \{\rho, u, v, e\}.$$

Краевые условия при решении уравнения магнитной индукции (3) можно описать следующим образом: на оси симметрии – условие симметрии, на внешней границе –  $\partial \mathbf{H}(r) / \partial r = 0$ .

Граничные условия для системы уравнений диффузионного приближения (2) могут быть сформулированы следующим образом: на внешней границе – отсутствие падающего извне излучения, на оси симметрии – условие симметрии. Расчет лазерного излучения (4) вдоль оси  $r$  должен сопровождаться соответствующими граничными условиями:  $q_{\text{лаз}}|_{r=\ell} = q_{\text{лаз}}^0 \exp[-(t/\tau)^2]$ ,  $q_{\text{лаз}}|_{r=0} = 0$ ,  $\tau$  – полуширина лазерного импульса на полувысоте.

### 3. Вычислительный алгоритм

Метод численного решения одномерных уравнений плазмодинамики мишеней МИТС опирается на метод дробных шагов, который состоит в данном случае из двух шагов [16]. На первом дробном шаге учитываются газодинамические процессы (этим процессам соответствует “гиперболическая” часть рассматриваемой системы уравнений). Процессы переноса излучения и электромагнитные процессы, протекающие в устройствах системы МИТС, рассматриваются на втором дробном шаге.

Отметим, что приведенные выше системы дифференциальных уравнений относительно временной переменной  $t$  являются системами обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, которые могут быть разрешены с помощью векторного варианта многшагового метода Рунге-Кутты (в данной работе использован четырехшаговый вариант метода [17], который обладает 4-м порядком аппроксимации по времени  $t$ ).

На первом дробном шаге используется дивергентная форма уравнений Эйлера. Здесь (для временного дробного шага  $t \in [t, t + \Delta t/2]$ ) применяется нелинейная квазимонотонная компактно-полиномиальная разностная схема повышенного порядка точности:

$$\frac{\partial \mathbf{U}_i}{\partial t} + \frac{F(\mathbf{U}_{i+1/2}) - F(\mathbf{U}_{i-1/2})}{\Delta \xi} = \mathbf{F}_2, \quad \Delta \xi = [\xi_{i-1/2} - \xi_i, \xi_{i+1/2} - \xi_i].$$

Газодинамические параметры  $U_i^{n+1}, U_i^n$  относятся к центрам расчетных ячеек, в то время как потоки  $F_{i\pm 1/2}^n$  необходимо определить на поверхности этих ячеек. При этом для повышения порядка аппроксимации разностной схемы следует “восстановить” газодинамические параметры  $Y_{i\pm 1/2}^{R,L}, Y_i^{R,L}$  “справа” (индекс  $R$ ) и “слева” (индекс  $L$ ) от границ расчетных ячеек. Тогда любая реконструируемая функция  $Y(x), [x = \{\xi\}]$ ,  $\xi \in [-\Delta \xi / 2, \Delta \xi / 2]$ , представляется кусочно-полиномиальными распределениями вида (в этом случае используется нелинейная квазимонотонная компактно-полиномиальная разностная схема повышенного порядка точности):

$$Y(\xi) = F_i^n(\xi) = Y_i + \phi(Y_i) \left( \frac{\partial Y}{\partial \xi} \right)_i [\xi - \xi_i] + \frac{\phi(Y_i)}{2!} \left( \frac{\partial^2 Y}{\partial \xi^2} \right)_i [\xi - \xi_i]^2 + \\ + a_i [\xi - \xi_i]^3 + b_i [\xi - \xi_i]^4 + c_i [\xi - \xi_i]^5 + d_i [\xi - \xi_i]^6 + e_i [\xi - \xi_i]^7,$$

где  $\phi(Y)$  является функцией лимитером [18]:

$$\phi(Y_i) = \min \left( 1, \frac{|Y_i - \max(Y_k)|}{|Y_i - \max(Y_{k-1/2}, Y_{k+1/2})|}, \frac{|Y_i - \min(Y_k)|}{|Y_i - \min(Y_{k-1/2}, Y_{k+1/2})|} \right),$$

где  $k = i-2, i-1, i+1, i+2$ .

Функция  $Y(x)$  удовлетворяет условиям гладкого сопряжения:

$$F_i^n(\xi_{i-1}) = Y_{i-1}^n, \quad F_i^n(\xi_{i+1}) = Y_{i+1}^n, \quad \frac{dF_i^n(\xi_{i-1})}{d\xi} = Y_{\xi, i-1}^n, \quad \frac{dF_i^n(\xi_{i+1})}{d\xi} = Y_{\xi, i+1}^n,$$

и консервативности:

$$\frac{1}{\Delta_\xi} \int_{-\Delta_\xi/2}^{+\Delta_\xi/2} Y_i^n(\xi) d\xi = Y(\xi_i).$$

Указанные выше условия гладкого сопряжения можно сформулировать в виде системы линейных алгебраических уравнений:

$$AZ_i = \mathbf{F}_i, \quad \mathbf{Z}_i = (a_i, b_i, c_i, d_i, e_i)^T, \quad \mathbf{F}_i = (F_1, F_2, F_3, F_4, F_5)^T,$$

$$A = \begin{pmatrix} -\Delta_\xi^3 & \Delta_\xi^4 & -\Delta_\xi^5 & \Delta_\xi^6 & -\Delta_\xi^7 \\ 3\Delta_\xi^2 & -4\Delta_\xi^3 & 5\Delta_\xi^4 & -6\Delta_\xi^5 & 7\Delta_\xi^6 \\ \Delta_\xi^3 & \Delta_\xi^4 & \Delta_\xi^5 & \Delta_\xi^6 & \Delta_\xi^7 \\ 3\Delta_\xi^2 & 4\Delta_\xi^3 & 5\Delta_\xi^4 & 6\Delta_\xi^5 & 7\Delta_\xi^6 \\ 0 & \frac{1}{5}(\Delta_\xi/2)^4 & 0 & \frac{1}{7}(\Delta_\xi/2)^6 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F_1 = Y_{i-1}^n - Y_i + \phi(Y_i) \left( \frac{\partial Y}{\partial \xi} \right)_i \Delta_\xi - \frac{\phi(Y_i)}{2!} \left( \frac{\partial^2 Y}{\partial \xi^2} \right)_i \Delta_\xi^2, \quad F_2 = Y_{\xi, i-1}^n - \phi(Y_i) \left( \frac{\partial Y}{\partial \xi} \right)_i + \phi(Y_i) \left( \frac{\partial^2 Y}{\partial \xi^2} \right)_i \Delta_\xi,$$

$$F_3 = Y_{i+1}^n - Y_i - \phi(Y_i) \left( \frac{\partial Y}{\partial \xi} \right)_i \Delta_\xi - \frac{\phi(Y_i)}{2!} \left( \frac{\partial^2 Y}{\partial \xi^2} \right)_i \Delta_\xi^2, \quad F_4 = Y_{\xi, i+1}^n - \phi(Y_i) \left( \frac{\partial Y}{\partial \xi} \right)_i - \phi(Y_i) \left( \frac{\partial^2 Y}{\partial \xi^2} \right)_i \Delta_\xi,$$

$$F_5 = -\frac{\phi(Y_i)}{3!} \left( \frac{\partial^2 Y}{\partial \xi^2} \right)_i \left[ \frac{\Delta_\xi}{2} \right]^2.$$

При этом матрица  $A$  фиксирована, а значит, фиксирована обратная матрица  $A^{-1}$  и может быть найдена до проведения основных расчетов.

Входящие в кусочно-полиномиальные распределения  $Y(\xi)$  пространственные производные  $(\partial Y / \partial \xi)_{i,j}$  вычисляются следующим образом: сначала для дискретной функции  $Y_i$  определим приближенное значение  $F_i$  первой частной производной по пространственной переменной  $\xi$  с восьмым порядком точности.

Для этого в каждой ячейке с номером  $i$  для каждой восстанавливаемой величины  $Y_{i,j}$  осуществляется расчет индекса немонотонности  $\text{Ind}(Y)$ :

$$\text{Ind}(Y)_i = \frac{\frac{1}{12}|-Y_{i+2,j} + 16Y_{i+1,j} - 30Y_{i,j} + 16Y_{i-1,j} - Y_{i-2,j}|}{\left(\frac{1}{2}|-Y_{i+2,j} + 4Y_{i+1,j} - 3Y_{i,j}| + \frac{1}{2}|3Y_{i,j} - 4Y_{i-1,j} + Y_{i-2,j}| + \theta\right)},$$

где величина  $\theta$  является малым параметром.

Далее найдем первую производную  $f$  по переменной  $\xi$  по обычной аппроксимационной формуле второго порядка точности и произведем её “монотонное ограничение” на сетке

$$\overline{\text{Ind}}(Y)_i = 1 \cdot \text{Ind}(Y)_i + 2 \cdot [1 - \text{Ind}(Y)_i], \quad f_i = \frac{Y_{i+1} - Y_{i-1}}{2\Delta_\xi} + O(\Delta_\xi^2),$$

$$\tilde{f}_i = \text{sign}(Y_{i+1} - Y_{i-1}) \min(\overline{\text{Ind}}(Y)_{i+2} |f_{i+2}|, \overline{\text{Ind}}(Y)_{i+1} |f_{i+1}|, |f_i|, \overline{\text{Ind}}(Y)_{i-1} |f_{i-1}|, \overline{\text{Ind}}(Y)_{i-2} |f_{i-2}|),$$

где  $\Delta$  – шаг пространственной сетки в направлении  $\xi$ . Тогда приближенное “монотонизованное” значение  $\tilde{F}_i$  первой частной производной по пространственным перемен-

ным  $\xi$  с ошибкой аппроксимации на уровне  $F_i = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\Delta_\xi^6}{2100} + O(\Delta_\xi^8)$  можно найти путем решения системы уравнений с трехдиагональной матрицей:

$$Q_i = (E + \Delta_2 / 30) \tilde{f}_i, \quad \tilde{F}_i = \left\{ (E + \Delta_2 / 6)^{-1} Q_i \right\}_i,$$

$$F_i = \text{sign}(Y_{i+1} - Y_{i-1}) \min(\overline{\text{Ind}}(Y)_{i+2} |\tilde{F}_{i+2}|, \overline{\text{Ind}}(Y)_{i+1} |\tilde{F}_{i+1}|, |\tilde{F}_{i+1}|, \overline{\text{Ind}}(Y)_{i-1} |\tilde{F}_{i-1}|, \overline{\text{Ind}}(Y)_{i-2} |\tilde{F}_{i-2}|),$$

где  $\Delta_0 f_i = f_{i+1} - f_{i-1}$ ,  $\Delta_2 f_i = f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}$ ,  $E$  – единичный оператор. Данная формула является симметричной конечной разностью шестого порядка точности [19].

Этот способ расчета первой производной  $F_i$  используется для формирования краевых условий при нахождении приближенного “монотонизованного” значения  $\tilde{F}_i$  первой частной производной по пространственным переменным  $\xi$  с ошибкой аппроксимации на уровне  $F_i = \partial / \partial \xi + \Delta_\xi^8 / 44100 + O(\Delta_\xi^{10})$ . В этом случае вычисления следует проводить таким образом (на основе решения системы уравнений с пятидиагональной матрицей) [19]:

$$Q_i = (E + 5\Delta_2 / 42) \tilde{f}_i, \quad F_i = \left\{ (E + 2\Delta_2 / 7 + \Delta_2^2 / 70)^{-1} Q_i \right\}_i.$$

Пространственные производные второго порядка  $(\partial^2 Y / \partial \xi^2)_i$  вычисляются с восьмым порядком точности [20].

Далее с помощью реконструируемой функции  $Y(\xi)$  “восстанавливаются” газодинамические параметры  $Y_{i\pm 1/2}^{R,L}, Y_i^{R,L}$  “справа” (индекс  $-R$ ) и “слева” (индекс  $-L$ ) от гра-

ниц расчетных ячеек. Затем проводится “антидиффузионная” коррекция “восстанавливаемых” параметров  $Y(\xi)$  на краях ячейки  $Y_{i\pm 1/2}^{R,L}, Y_i^{R,L}$  [21].

Из теории аппроксимации функций  $Y(\xi)$  усеченным рядом Тейлора известно [22], что в окрестности разрывов исходной функции  $Y(\xi)$  (и в областях больших градиентов решения) возникают осцилляции интерполируемой функции. Однако функцию  $Y(\xi)$  можно разложить в ряд более общего вида (в ряд Лагранжа-Бюрмана [23,24]) по степеням некоторой функции  $f(\xi - \xi_i)$ . При этом имеется возможность подобрать функцию  $f(\xi)$  так, чтобы уменьшить амплитуду паразитических осцилляций численного решения в области  $\ell_i \approx 1$ .

Пусть главная часть реконструируемой функции  $Y(x), [x = \{\xi\}]$ ,  $\xi \in [-\Delta_\xi / 2, \Delta_\xi / 2]$ , разложена в ряд по степеням функции (такой вид функции  $f(x)$  адекватно описывает поведение функции  $Y(\xi)$  вблизи разрывов первого рода)  $f(x) = \Delta_\xi \text{th}((\beta / \Delta_\xi)(\xi - \xi_i))$ ,  $\beta = 4 \cdot \text{Ind}(Y) + 6 \cdot (1 - \text{Ind}(Y))$  с помощью разложения Лагранжа-Бюрмана [25,26]. Тогда реконструируемая функция  $Y(\xi)$  может быть записана в виде

$$Y(\xi) = F_i^n(\xi) = Y_i + \phi(Y_i) \left\{ f(\xi - \xi_i) p_1 + \frac{f^2(\xi - \xi_i)}{2!} p_2 \right\} + a_i [\xi - \xi_i]^3 + b_i [\xi - \xi_i]^4 + c_i [\xi - \xi_i]^5 +$$

$$+ d_i [\xi - \xi_i]^6 + e_i [\xi - \xi_i]^7,$$

$$p_1 = \left( \frac{\partial Y}{\partial \xi} \right)_i \bigg/ \left( \frac{\partial f}{\partial \xi} \right)_i, \quad p_2 = \left( \frac{\partial^2 Y}{\partial \xi^2} \right)_i \bigg/ 2 \left( \frac{\partial f}{\partial \xi} \right)_i^2 - \left( \frac{\partial Y}{\partial \xi} \right)_i \left( \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} \right)_i \bigg/ 2 \left( \frac{\partial f}{\partial \xi} \right)_i^3,$$

где  $p_1, p_2$  – первые коэффициенты разложения функции  $Y(\xi)$  в усеченный ряд Лагранжа-Бюрмана [23,24]. Отметим также [25], что при условии  $f(\xi) = \xi$  коэффициенты  $p_1, p_2$  переходят в коэффициенты обычного ряда Тейлора.

Как и прежде, для реконструируемой функции  $Y(\xi)$  условия гладкого сопряжения и баланса можно сформулировать в виде системы линейных алгебраических уравнений (отметим, что матрица  $A$  при этом остается неизменной):

$$A \mathbf{Z}_i = \mathbf{F}_i, \quad \mathbf{Z}_i = (a_i, b_i, c_i, d_i, e_i)^T, \quad \mathbf{F}_i = (F_1, F_2, F_3, F_4, F_5)^T,$$

$$F_1 = Y_{i-1}^n - Y_i - \phi(Y_i) \left\{ -f(\Delta_\xi) p_1 + \frac{f^2(\Delta_\xi)}{2!} p_2 \right\}, \quad F_2 = Y_{\xi, i-1}^n - \phi(Y_i) \left\{ p_1 - f(\Delta_\xi) p_2 \right\} \left( \frac{\partial f}{\partial \xi} \right)_{\Delta_\xi},$$

$$F_3 = Y_{i+1}^n - Y_i - \phi(Y_i) \left\{ f(\Delta_\xi) p_1 + \frac{f^2(\Delta_\xi)}{2!} p_2 \right\}, \quad F_4 = Y_{\xi, i+1}^n - \phi(Y_i) \left\{ p_1 + f(\Delta_\xi) p_2 \right\} \left( \frac{\partial f}{\partial \xi} \right)_{\Delta_\xi},$$



$$F_5 = -4\phi(Y_i) p_2 \left( 1 - \frac{2}{\beta} \operatorname{th} \left( \frac{\beta}{2} \right) \right) \left[ \frac{\Delta_\xi}{2} \right]^2, \quad f(x) = \Delta_\xi \operatorname{th} \left( \frac{\beta}{\Delta_\xi} (\xi - \xi_i) \right).$$

Из приведенных соотношений видно, что в нелинейной квазимонотонной компактно-полиномиальной разностной схеме “восстанавливаемое” внутри расчетной ячейки  $\xi \in [-\Delta_\xi / 2, \Delta_\xi / 2]$ , распределение  $Y(\xi)$  газодинамических параметров опирается на полином 7-й степени, причем главная (“негладкая”) его часть вблизи разрывов выделяется отдельным способом (на основе разложения Лагранжа-Бюрмана) и находится с использованием компактных разностей восьмого порядка точности [19,20] (первые  $(\partial Y / \partial \xi)_i$  и вторые производные  $(\partial^2 Y / \partial \xi^2)_i$ ).

Численное решение уравнения диффузии магнитного поля и уравнения теплопроводности проводилось с помощью компактной разностной схемы повышенного порядка точности [26]. Метод расчета переноса широкополосного излучения рассматривается на основе многогруппового диффузионного приближения [5]. Шаг по времени  $\Delta t$ , необходимый для интегрирования приведенной выше компактно-полиномиальной разностной схемы выбирается из условия выполнения критерия устойчивости Куранта-Фридрихса-Леви.

#### 4. Результаты и обсуждение

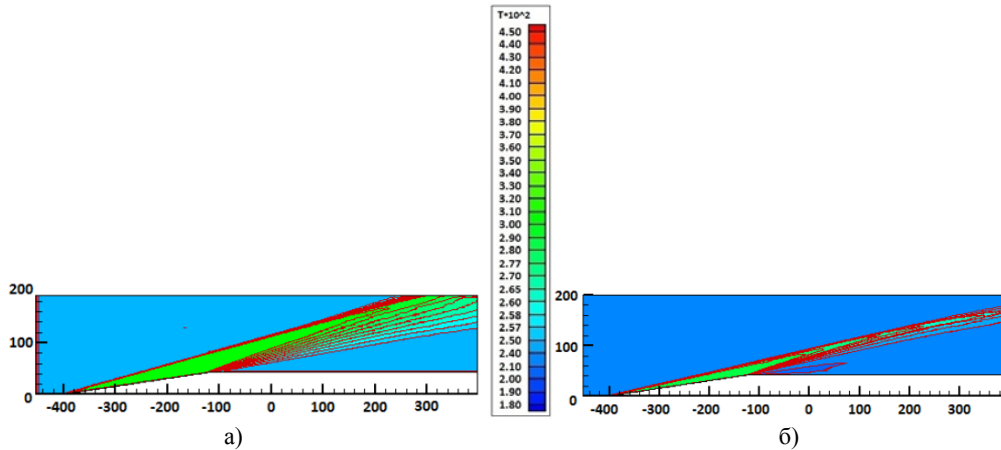
Для обоснованного количественного анализа физических процессов, которые могут протекать в плазме мишени МИТС, необходимо осуществить верификацию предложенной математической модели и численных методов с помощью решения ряда тестовых (модельных) задач.

Конвективная часть компьютерной модели мишеней МИТС тестировалась на одномерном варианте задачи Римана о распаде неустойчивого разрыва заданной конфигурации. Сопоставление точного и приближенного решения показало, что отличие составляет не более процента [27]. В качестве дополнительных тестовых верификационных расчетов рассматривается обтекание потоком воздухом клина, сопряженного с пластиной (рис.1а), а также конуса (рис.1б), сопряженного с цилиндром со следующими параметрами набегающего потока: давление  $P=2060$  Па, скорость  $V=1860$  м/с, температура  $T=223$  К, число Маха  $M_\infty = 6$ . Из [28] (для  $M_\infty = 6$  и угла отклонения клина от плоскости симметрии  $\nu = 8.7^\circ$ ) следует, что угол наклона  $\beta$  ударной волны составляет величину  $\beta = 16^\circ$  (в расчете  $\beta = 15.91^\circ$ , см. рис.1а). На рис.1б показаны аналогичные результаты, полученные при обтекании воздушным потоком конуса, сопряженного с цилиндром. При этом из [28] (при  $M_\infty = 6$  и  $\nu = 8.7^\circ$ ) следует, что угол наклона ударной волны равен  $\beta = 12.9^\circ$ . Данный результат также находится в хорошем соответствии с выполненным расчетом (в расчете  $\beta = 12.85^\circ$ , см. рис.1б).

“Тепловая” часть модели тестировалась на некоторых задачах, допускающих точные аналитические решения: прогрев сплошной среды [6], заполняющей плоское полуграниченное пространство  $r > 0$  потоком тепла, через левую неподвижную границу  $r = 0$ .

Группа расчетов, представленных в работе, проведена для случая воздействия импульсов лазерного (Nd-лазер) излучения с плотностью потока излучения на уровне

$q_{\text{лаз}} \approx 1 \times 10^{12} \div 1 \times 10^{14}$  [Вт/см<sup>2</sup>]. Приведем краткое описание полученных результатов, графическое представление которых показано на рис.2-5. Эти результаты отвечают следующим параметрам математической модели:  $Q_{\text{fus}}^e = 0$ , плотность потока лазерного излучения  $q_{\text{лаз}} = 2 \times 10^{14}$  [Вт/см<sup>2</sup>], полуширина лазерного импульса  $\tau = 10$  [нс].



**Рис.1.** Пространственное распределение температуры. а) клин, сопряженный с пластиной; б) конус, сопряженный с цилиндром.

Из проведенных расчетов следует, что процесс лазерного сжатия мишени МИТС, находящейся во внешнем магнитном поле относительно времени  $t$ , можно условно представить в виде трех стадий: "начальная" стадия сжатия мишени МИТС, стадия "схлопывания" мишени МИТС и стадия "разлета" плазменного образования.

На рис.2,3 приведены распределения статического  $P$  и магнитного  $P_{\text{маг}}$  давления, плотности  $\rho$  и потока лазерного излучения  $q_{\text{лаз}}$ , которые соответствуют первой "начальной" стадии ( $t = 2.14$  нс) сжатия мишени МИТС, которая находится во внешнем магнитном поле. Эта стадия соответствует автономному распространению в материале мишени МИТС системы двух ударных волн, которые возникают из-за джоулева энерговыделения и поглощения энергии лазерного излучения в плазме вещества внешнего коаксиального слоя мишени (рис.3).

Графики, показанные на рис.4, соответствуют стадии "схлопывания" мишени МИТС. Плазмодинамические параметры этой стадии определяются отраженной от оси симметрии ударной волной, которая движется в сторону внешней границы расчетной области. На этой стадии большая часть объема плазменного образования располагается вблизи начала координат. При этом максимальные значения давления и температуры плазмы мишени МИТС наблюдаются около оси симметрии системы мишень-камера реактора (рис.4).

На рис.5 показаны распределения магнитного давления  $P_{\text{маг}}$  и суммарного потока  $q$  собственного излучения плазменного образования. Эти распределения соответствуют стадии разлета плазменного образования ( $t = 8.5$  нс).

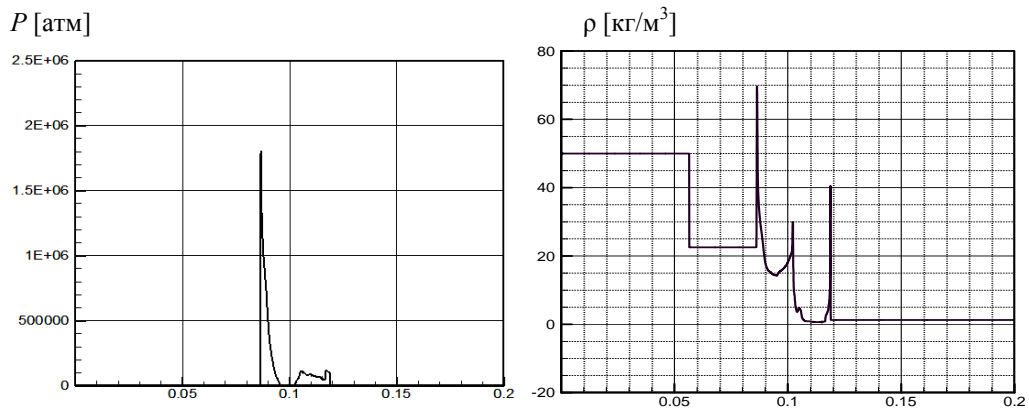


Рис.2. Пространственное распределение давления  $P$  и плотности  $\rho$  на момент времени  $t=2.14$  нс.

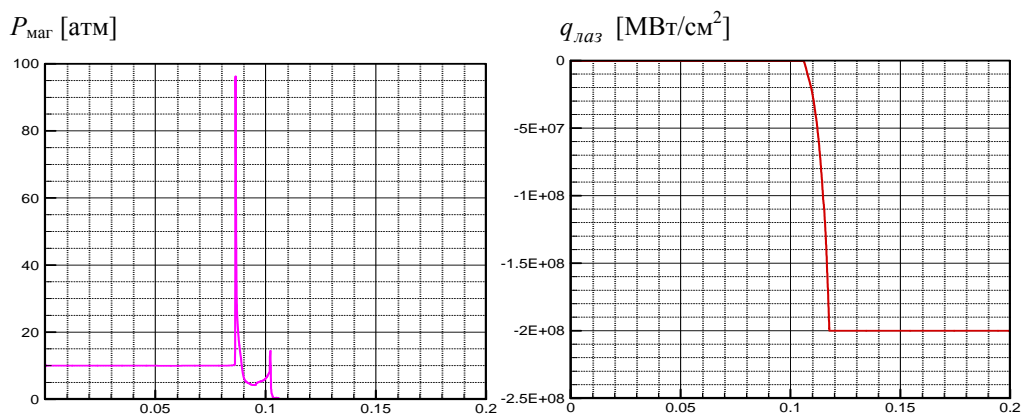


Рис.3. Пространственное распределение магнитного давления  $P_{\text{маг}}$  и потока лазерного излучения  $q_{\text{лаз}}$  на момент времени  $t = 2.14$  нс.

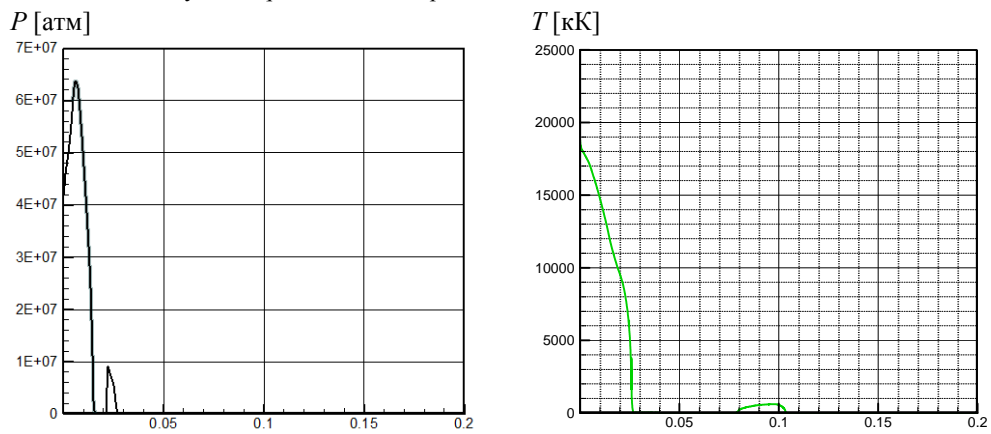
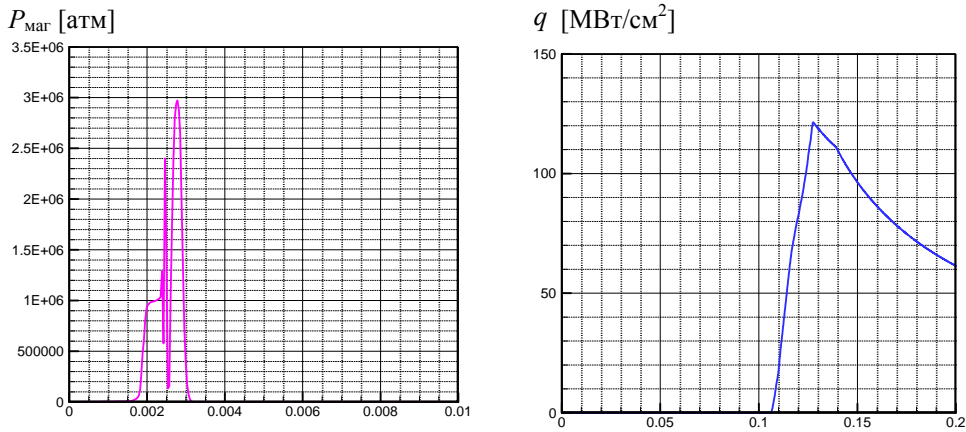


Рис.4. Пространственное распределение давления  $P$  и температуры  $T$  на момент времени  $t = 5.66$  нс.



**Рис.5.** Пространственное распределение магнитного давления  $P_{\text{mag}}$  и суммарного потока собственного излучения плазмы  $q$  на момент времени  $t = 8.5$  нс.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. О.Г. Ольховская, В.А. Гасилов, М.М. Баско, П.В. Сасоров, В.Г. Новиков, И.Ю. Вичев, И.И. Галузова. О расчётах выходной мощности и спектра рентгеновского излучения Z-пинчей на основе многопроволочныхборок // Математическое моделирование, 2016, т.28, №1, с.3-22;  
O.G. Olkhovskaya, V.A. Gasilov, M.M. Basko et al. Calculation of output power and X-ray spectrum of Z-pinch based on multiwire arrays // Mathematical Models and Computer Simulations, 2016, v.8, №4, p.422-437.
2. С.В. Рыжков. Современное состояние, проблемы и перспективы термоядерных установок на основе магнитно-инерционного удержания горячей плазмы // Известия РАН. Сер. Физическая, 2014, т.78, с.647-653;  
S.V. Ryzhkov. Current status, problems and prospects of thermonuclear facilities based on the magneto-inertial confinement of hot plasma // Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Physics, 2014, v.78, p.456-461.
3. В.В. Кузенов, С.В. Рыжков, П.А. Фролко. Схемы стандартного и комбинированного воздействия в концепции магнитно-инерциального термоядерного синтеза // Прикладная физика, 2015, №2, с.21-27;  
V.V. Kuzenov, S.V. Ryzhkov, P.A. Frolko. Skhemy standartnogo i kombinirovannogo vozdeistviia v kontseptsii magnitno-inertsialnogo termoiadernogo sinteza // Prikladnaia fizika, 2015, №2, s.21-27.
4. Б. Н. Козлов. Скорости термоядерных реакций // Атомная энергия, 1962, т.12, №3, с.238;  
B.N. Kozlov. Skorosti termoiadernykh reaktsii // Atomnaia energiya, 1962, v.12, №3, s.238.
5. Б.Н. Четверушкин. Математическое моделирование задач динамики излучающего газа. – М.: Наука, 1985, 303 с.;  
B.N. Chetverushkin. Matematicheskoe modelirovanie zadach dinamiki izluchaiushchego gaza. – М.: Nauka, 1985, 303 с.
6. А.А. Самарский, Ю.П. Попов. Разностные методы решения задач газовой динамики. – М.: Едиториал УРСС, 2009. 424 с.;  
A.A. Samarskii, Yu.P. Popov. Raznostnye metody resheniia zadach gazovoi dinamiki. – М.: Editorial URSS, 2009, 424 s.
7. В.Ф. Дьяченко, В.С. Имшенник. К магнитногидродинамической теории пинч-эффекта в высо-

- котемпературной плотной плазме // Вопросы теории плазмы, вып.5. – М.: Атомиздат, 1967, с.394-438;  
*V.F. Diachenko, V.S. Imshennik.* К магнитногидродинамической теории pinch-эффекта в высокотемпературной плотной плазме // Вопросы теории плазмы, вып.5. – М.: Атомиздат, 1967, с.394-438.
8. *С.И. Брагинский.* Явления переноса в плазме // Вопросы теории плазмы, вып.1. – М.: Атомиздат, 1963, с.183-272;  
*S.I. Braginskii.* Iavleniia perenosa v plazme // Voprosy teorii plazmy, vyp.1. – М.: Atomizdat, 1963, s.183-272.
  9. *Я.Б. Зельдович, Ю.П. Райзер.* Физика ударных волн и высокотемпературных явлений гидродинамических явлений. – М.: Наука, 1966, 688 с.;  
*Ya.B. Zeldovich, Yu.P. Raizer.* Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena. – New York: Academic Press Inc., 1967, 944 p.
  10. *S.T. Surzhikov.* Computing system for solving radiative gasdynamic problems of entry and re-entry space vehicles // Proceedings of the 1st International Workshop on Radiation of High Temperature Gases in Atmospheric Entry, 2003, ESA-533, p. 111-118.
  11. *С.Т. Суржиков.* Тепловое излучение газов и плазмы. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004, 543 с.;  
*S.T. Surzhikov.* Computational physics of electric discharges in gas flows. – Walter de Gruyter GmbH, 2013, 427 p.
  12. *В.В. Кузенов, С.В. Рыжков, В.В. Шумаев.* Определение термодинамических свойств замагниченной плазмы на основе модели Томаса-Ферми // Прикладная физика, 2014, № 3, с.22-25;  
*V.V. Kuzenov, S.V. Ryzhkov, V.V. Shumaev.* Opredelenie termodinamicheskikh svoystv zamagnichennoi plazmy na osnove modeli Tomasa-Fermi // Prikladnaia fizika, 2014, № 3, s.22-25.
  13. *V.V. Kuzenov, S.V. Ryzhkov, V.V. Shumaev.* Application of Thomas-Fermi model to evaluation of thermodynamic properties of magnetized plasma // Problems of Atomic Science and Technology, 2015, no.1 (95), p.97-99.
  14. *В.В. Кузенов, А.И. Лебо, И.Г. Лебо, С.В. Рыжков.* Физико-математические модели и методы расчета воздействия мощных лазерных и плазменных импульсов на конденсированные и газовые среды. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015, 328 с.;  
*V.V. Kuzenov, A.I. Lebo, I.G. Lebo, S.V. Ryzhkov.* Fiziko-matematicheskie modeli i metody rascheta vozdeystviia moshchnykh lazernykh i plazmennykh impulsov na kondensirovannye i gazovye sredy. – М.: MGTU im. N.E. Bauman, 2015, 328 s.
  15. *V.V. Kuzenov, S.V. Ryzhkov.* Numerical modeling of magnetized plasma compressed by the laser beams and plasma jets // Problems of Atomic Science and Technology, 2013, №1 (83), p.12-14.
  16. *В.М. Ковеня, Н.Н. Яненко.* Метод расщепления в задачах газовой динамики. – М.: Наука, 1981, 304 с.;  
*V.M. Kovenia, N.N. Ianenko.* Metod rasshchepeniia v zadachakh gazovoi dinamiki. – М.: Nauka, 1981, 304 s.
  17. *К.Н. Волков, В.Н. Емельянов.* Моделирование крупных вихрей в расчетах турбулентных течений. – М.: Физматлит, 2008, 364 с.;  
*K.N. Volkov, V.N. Emelianov.* Modelirovanie krupnykh vikhrei v raschetakh turbulentnykh techenii. – М.: Fizmatlit, 2008, 364 s.
  18. *T.J. Barth.* On unstructured grids and solvers // Computational Fluid Dynamics. – Von Karman Institute for Fluid Dynamics, 1990, Lecture Series 1990-03, 65 p.
  19. *А.Д. Савельев.* Составные компактные схемы высокого порядка для моделирования течения вязкого газа // ЖВМ и МФ, 2007, т.47, №8, с.1387-1401;  
*A.D. Savel'ev.* High-order composite compact schemes for simulation of viscous gas flows // Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2007, v.47, №8, p.1332-1346.
  20. *Л.Е. Довгилевич, И.Л. Софронов.* О применении компактных схем для решения волнового уравнения. – М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2008, препринт №84, 27 с.;

- L.E. Dovgilovich, I.L. Sofronov.* O primeneniі kompaktnykh skhem dlia resheniia volnovogo uravneniia. – М.: ИРМ им. М.В. Келдыша РАН, 2008, preprint №84, 27 с.
21. *O. Vokanowski, S. Martin, R. Munos, H. Zidani.* An anti-diffusive scheme for viability problems // *Applied Numerical Mathematics*, 2006, v.56, p.1147-1162.
  22. *В.И. Пинчуков.* Моделирование нестационарных течений на больших временах и с использованием неявных схем высоких порядков // *Математическое моделирование*, 2004, т.16, №8, с.59-69;  
*V.I. Pinchukov.* Modelirovanie nestatsionarnykh techenii na bolshikh vremenakh i s ispolzovaniem neiyvnykh skhem vysokikh poriadkov // *Matematicheskoe modelirovanie*, 2004, t.16, №8, s.59-69.
  23. *М. Абрамовиц, И. Стюган.* Справочник по специальным функциям. – М.: Наука, 1979. 832 с.;  
*M. Abramowitz, I. Stegun.* Handbook of Mathematical Functions: with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. – National Bureau of Standards, 1972, 1045 p.
  24. *М.А. Лаврентьев, В.В. Шабат.* Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973, 688 с.;  
*M.A. Lavrent'ev, V.V. Shabat.* Metody teorii funktsii kompleksnogo peremennogo. – М.: Nauka, 1973, 688 s.
  25. *Е.В. Ворожцов.* Применение разложений Лагранжа-Бюрмана для численного интегрирования уравнений невязкого газа // *Вычислительные методы и программирование*, 2011, т.12, №3, с.348-361;  
*E.V. Vorozhtsov.* Primenenie razlozhenii Lagranzha-Biurmana dlia chislennogo integrirvaniia uravnenii neviakzogo gaza // *Vychislitelnye metody i programmirovaniie*, 2011, t.12, №3, s.348-361.
  26. *А.И. Толстых.* Компактные разностные схемы и их применение в задачах аэрогидродинамики. – М.: Наука, 1990, 232 с.;  
*A.I. Tolstykh.* Hybrid schemes with high-order multioperators for computing discontinuous solutions // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2013, v.53, p.1303-1322.
  27. *В.В. Кузенов.* Тестирование отдельных элементов метода расчета физических процессов в мишени магнитно-инерциального термоядерного синтеза // *Прикладная физика*, 2016, №2, с.16-24;  
*V.V. Kuzenov.* Testirovanie otdelnykh elementov metoda rascheta fizicheskikh protsessov v mi-sheni magnitno-inertsialnogo termoiadernogo sinteza // *Prikladnaia fizika*, 2016, №2, s.16-24.
  28. *Н.Я. Фабрикант.* Аэродинамика. Общий курс. – М.: Наука, 1964, 815 с.;  
*N.Y. Fabrikant.* Aerodynamika. Obshchii kurs. – М.: Nauka, 1964, 815 s.

Поступила в редакцию 25.05.16