

СТАБИЛИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕМИНИМАЛЬНО-ФАЗОВЫХ СИСТЕМ

С.Б. Ткачев

МГТУ им. Н.Э.Баумана

Россия, 105005, г. Москва, ул. 2-я Бауманская, д. 5, стр. 1

E-mail: s_tkachev@bmstu.ru

Ключевые слова: Нелинейная динамическая система, стабилизация, метод виртуальных выходов, квазиканонический вид, нормальная форма

Аннотация: Для нелинейных динамических систем, линейных по управлению, рассматривается задача стабилизации положения равновесия в случае, если система не является минимально-фазовой, т.е. система преобразуется к такому регулярному квазиканоническому виду или такой нормальной форме, у которых нулевая динамика не является асимптотически устойчивой. Приводятся основные сведения о методе виртуальных выходов и рассматриваются различные прикладные задачи, для которых методом виртуальных выходов удается получить минимально фазовую систему и стабилизировать положение равновесия.

1. Введение

В теории нелинейных динамических систем с управлением известен ряд важных теоретических результатов, позволяющих для достаточно широкого класса систем решать задачи стабилизации положений равновесия. Основное внимание при этом уделялось аффинным системам — нелинейным системам, линейным по управлению. [1, 3–6, 10, 16, 23, 28, 35]. Для аффинных систем, преобразуемых к регулярному каноническому виду [1, 3–6, 10], один из подходов заключается в преобразовании исходной системы в линейную управляемую систему с помощью нелинейной замены переменных и введения нового управления.

Условия приводимости аффинной системы к каноническому виду выполнены не всегда, и довольно часто система может быть преобразована только к квазиканоническому виду [5]. Отметим, что функцию, определяющую преобразование аффинной системы к квазиканоническому виду, часто удобно рассматривать как выход системы и использовать терминологию и теорию нормальной формы [18, 20, 26]. При этом существенным является наличие у системы, записанной в нормальной форме, свойства минимальной фазовости [18, 20], поскольку для таких систем известно решение задачи стабилизации положения равновесия статическими и динамическими обратными связями по состоянию [18–21, 24, 26, 33].

В случае, если аффинная система не является минимально фазовой, проблема стабилизации ее положения равновесия оказалась достаточно сложной и подходы к

ее решению известны в частных случаях [15, 22, 29, 32, 34, 36, 37].

Одним из методов, позволяющих найти стабилизирующую обратную связь для неминимально фазовой системы, является метод виртуальных выходов [7–9, 11]. Построение такого нового выхода, что соответствующая ему нормальная форма является минимально-фазовой, позволяет использовать для стабилизации известные подходы.

Отметим, что при использовании метода виртуальных выходов по-существу ищется специальное многообразие (многообразие нулевой динамики), свободное движение по которому обеспечивает стабилизацию положения равновесия по части переменных нормальной формы, замкнутой обратной связью по состоянию. При этом ресурс управления используется для удержания системы в окрестности этого многообразия. Поскольку указанное многообразие характеризует свойства стабилизируемой аффинной системы, может оказаться, что ресурсы управления, используемые для удержания системы в окрестности этого многообразия, расходуются более рационально, чем при использовании других методов стабилизации.

2. Квазиканонический вид и нормальная форма аффинной системы

Рассмотрим гладкую стационарную аффинную систему со скалярным управлением

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= A(x) + B(x)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^1, \\ A(x) &= (a_1(x), \dots, a_n(x))^T, \quad B(x) = (b_1(x), \dots, b_n(x))^T, \\ a_i(x), b_i(x) &\in C^\infty(\Omega), \quad i = \overline{1, n}, \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^n, \\ (\dot{\cdot}) &= d(\cdot)/dt, \end{aligned}$$

где t — независимое переменное.

Пусть система (1) в некоторой окрестности U^0 точки x^0 преобразуется к виду

$$(2) \quad \begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \dots, \dot{z}_{\rho-1} = z_\rho, \\ \dot{z}_\rho &= f(z, \bar{\eta}) + g(z, \bar{\eta})u, \\ \dot{\eta} &= q(z, \bar{\eta}) + w(z, \bar{\eta})u, \end{aligned}$$

где $z = (z_1, \dots, z_\rho)^T$, $\bar{\eta} = (\bar{\eta}_1, \dots, \bar{\eta}_m)^T$, $\bar{\eta} \in \mathbb{R}^m$, $\rho + m = n$, и $(z, \bar{\eta}) = \Phi(x)$, — соответствующая локальная гладкая невырожденная замена переменных.

Указанный вид называют [5] квазиканоническим видом системы (1). Если коэффициент $g(z, \bar{\eta})$ при управлении в точке $(z^0, \bar{\eta}^0) = \Phi(x^0)$ отличен от нуля, то квазиканонический вид называют регулярным в этой точке. Отметим, что при $\rho = n$ система (2) содержит управление только в последнем уравнении и такой вид называют каноническим.

Будем использовать обозначение $L_X \lambda(x)$ для производной Ли функции $\lambda(x)$ по векторному полю X .

Замена переменных по части переменных z определяется достаточно гладкой функцией $\varphi(x)$, удовлетворяющая в некоторой окрестности точки x^0 системе нелинейных уравнений в частных производных

$$(3) \quad L_B L_A^i \varphi(x) = 0, \quad i = \overline{0, \rho - 2}$$

для некоторого числа ρ , где $\rho \leq n$.

Квазиканонический вид будет регулярным, если функция $\gamma(x) = L_B L_A^{\rho-1} \varphi(x)$ в точке x^0 удовлетворяет условию

$$(4) \quad \gamma(x^0) = L_B L_A^{\rho-1} \varphi(x^0) \neq 0.$$

Квазиканонический вид (2) в окрестности точки x^0 можно упростить за счет выбора специальной замены переменных $(z, \eta) = \Phi(x)$, использующей $m = n - \rho$ первых интегралов $\eta_k = \eta_k(x)$ векторного поля B :

$$(5) \quad \begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \dots, \dot{z}_{\rho-1} = z_\rho, \\ \dot{z}_\rho &= f(z, \eta) + g(z, \eta)u, \\ \dot{\eta} &= q(z, \eta). \end{aligned}$$

Такой специальный квазиканонический вид системы (1) более удобен для анализа.

Если функция $\varphi(x)$, удовлетворяющая соотношениям (3)-(4), то такую функцию называют выходом аффинной системы (1), число ρ — относительной степень выхода в точке x^0 .

В качестве выхода может быть выбрана и произвольная достаточно гладкая функция состояния системы — *виртуальный выход*.

Предположим, что для системы (1) задан выход

$$(6) \quad y = \varphi(x),$$

относительная степень которого в точке x^0 равна ρ . Тогда в силу выполнения условия регулярности система (1) может быть локально преобразована к специальному квазиканоническому виду (5), с которым связана система

$$(7) \quad \begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \dots, \dot{z}_{\rho-1} = z_\rho, \\ \dot{z}_\rho &= f(z, \eta) + g(z, \eta)u, \\ \dot{\eta} &= q(z, \eta), \\ y &= z_1. \end{aligned}$$

Систему (7) называют [18, 26] нормальной формой системы (1) с выходом (6).

Таким образом, задача преобразования аффинной системы (1) с заданным выходом (6) к нормальной форме (7) является частным случаем задачи о преобразовании аффинной системы к квазиканоническому виду, поскольку в последней задаче требуется найти функцию φ , вводящую новые переменные z .

В дальнейшем будем для системы (1) с некоторым виртуальным выходом использовать терминологию теории нормальной формы.

Поскольку для фиксированной аффинной системы могут рассматриваться несколько виртуальных выходов, удобнее говорить не об относительной степени системы с заданным выходом в некоторой точке, а об относительной степени фиксированного выхода системы.

3. Метод виртуальных выходов для систем со скалярным управлением

Для аффинной системы (1) фиксируем некоторый выход $y = h(x)$, при котором относительная степень системы (1) в точке $x = 0$ равна 2. Запишем систему (1) с

указанным выходом в соответствующей нормальной форме

$$(8) \quad \dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = f(z, \eta) + g(z, \eta)u,$$

$$(9) \quad \dot{\eta} = q(z, \eta).$$

В (8)–(9) $z = (z_1, z_2)^T \in \mathbb{R}^2$, $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_{n-2})^T \in \mathbb{R}^{n-2}$, $f(0, 0) = 0$, $g(0, 0) \neq 0$, $q(0, 0) = 0$, $z_1 = h(x)$, $z_2 = L_A h(x)$, $\eta = \Psi(x)$, $\Psi(0) = 0$.

Теорема 1. [7] Пусть система (1) с виртуальным выходом φ , $\varphi|_{x=0} = 0$, имеет в точке $x = 0$ относительную степень $\rho = 2$, а нулевая динамика асимптотически устойчива. Если в переменных z, η нормальной формы (8)–(9) $\varphi'_{z_1}|_{z=0, \eta=0} \neq 0$, то существуют функции $v_1(\eta)$, $v_2(\eta)$, $v_i(0) = 0$, $i = 1, 2$, стабилизирующее положение равновесия $\eta = 0$ системы

$$(10) \quad \dot{\eta} = q(v_1, v_2, \eta)$$

с управлениями v_1, v_2 , причем

$$(11) \quad \left. \frac{dv_1(\eta)}{dt} \right|_{\dot{\eta}=q(v_1(\eta), v_2(\eta), \eta)} = v_2(\eta).$$

Теорема 2. [7] Пусть управления $v_1 = v_1(\eta)$, $v_2 = v_2(\eta)$ стабилизируют положение равновесия $\eta = 0$ системы (10) и удовлетворяет условию (11). Если система (8)–(9) с виртуальным выходом $\varphi(z, \eta) = z_1 - v_1(\eta)$ имеет относительную степень $\rho = 2$ в точке $(z, \eta) = 0$, то нулевая динамика, соответствующая виртуальному выходу φ , асимптотически устойчива в точке $\eta = 0$.

Рассмотрим задачу стабилизации верхнего неустойчивого положения равновесия перевернутого маятника, установленного на тележке. Управляемым параметром является сила f , прикладываемая к тележке. Желательно, чтобы одновременно с маятником стабилизировалось и положение тележки в точке $x = 0$, $\dot{x} = 0$.

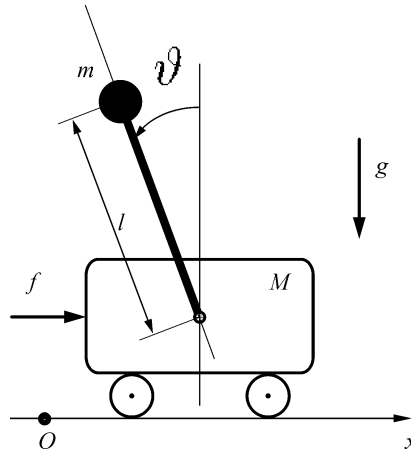


Рис. 1. Перевернутый маятник на тележке

Для решения указанной задачи разработаны различные алгоритмы [27]. Ограничимся случаем, когда $|\theta| \leq \frac{\pi}{2}$. Пусть тележка имеет массу M , маятник — массу m , а

центр масс маятника расположен на расстоянии l от точки подвеса. Для упрощения формул примем момент инерции маятника относительно его центра масс равным 0. В этом случае модель системы имеет вид

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \frac{mg \cos \theta \sin \theta - ml \sin \theta \dot{\theta}^2 + f}{M + m \sin^2(\theta)} \\ \ddot{\theta} &= \frac{(M + m)g \sin \theta - ml \cos \theta \sin \theta \dot{\theta}^2 + f \cos \theta}{(M + m \sin^2 \theta)l}\end{aligned}$$

Преобразуем систему (??) к нормальной форме относительно виртуального выхода $y = \theta$. Положим $z_1 = \theta$, $z_2 = \dot{\theta}$. Относительно введенных переменных в области $|\theta| < \frac{\pi}{2}$ относительная степень выхода равна 2. Первые интегралы векторного поля D при управлении f ,

$$D = \frac{1}{M + m \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} + \frac{\cos \theta}{(M + m \sin^2 \theta)l} \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}}.$$

имеют вид $\varphi_1 = \theta$, $\varphi_2 = x$ и $\varphi_3 = l\dot{\theta} - \dot{x} \cos \theta$. Примем $\eta_1 = x$, $\eta_2 = l\dot{\theta} - \dot{x} \cos \theta$.

Можно видеть, что замена $(z, \eta) = \Phi(\theta, \dot{\theta}, x, \dot{x})$

$$z_1 = \theta, \quad z_2 = \dot{\theta}, \quad \eta_1 = x, \quad \eta_2 = l\dot{\theta} - \dot{x} \cos \theta$$

гладкая и невырождена в рассматриваемой области $|\theta| < \frac{\pi}{2}$, а обратная замена имеет вид

$$\theta = z_1, \quad \dot{\theta} = z_2, \quad x = \eta_1, \quad \dot{x} = \frac{lz_2 - \eta_2}{\cos z_1}.$$

В найденных переменных уравнения для η_1, η_2 имеют вид

$$(12) \quad \dot{\eta}_1 = \frac{lz_2 - \eta_2}{\cos z_1}, \quad \dot{\eta}_2 = \left(g + \frac{lz_2 - \eta_2}{\cos z_1} z_2 \right) \sin z_1.$$

и дают следующие уравнения нулевой динамики

$$(13) \quad \dot{\eta}_1 = -\eta_2, \quad \dot{\eta}_2 = 0.$$

Нулевое положение равновесия этой системы не является асимптотически устойчивым.

Можно показать [12], что новому виртуальному выходу

$$\bar{y} = \theta + k_1 \eta_1 + k_2 \eta_2 = \theta + k_1 x + k_2 (l\dot{\theta} - \dot{x} \cos \theta),$$

где $k_2 > 0$ и $-\frac{1}{l} < k_1 < 0$ или $k_1 < -\frac{1}{l}$ и $k_2 < 0$, соответствует асимптотически устойчивая нулевая динамика.

Для построения стабилизирующего управления достаточно получить нормальную форму в виде <заготовки>, то есть правую часть уравнений записать в пере-

МЕННЫХ z, η .

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{z}}_1 &= \bar{z}_2, \\
\dot{\bar{z}}_2 &= \left(\frac{k_1(lz_2 - \eta_2) \sin z_1}{\cos^2 z_1} + \frac{k_2(lz_2 - \eta_2)z_2 \sin^2 z_1}{\cos^2 z_1} \right) z_2 + \\
&+ k_2(g \cos z_1 + (lz_2 - \eta_2)z_2)z_2 + \\
(14) \quad &+ \left(1 + \frac{k_1 l}{\cos z_1} + k_2 \left(\frac{2lz_2 - \eta_2}{\cos z_1} \right) \sin z_1 \right) \times \\
&\times \frac{(M + m) \sin z_1 g - mlz_2^2 \cos z_1 \sin z_1}{(M + m \sin^2 z_1)l} - \\
&- \left(\frac{k_1}{\cos z_1} + \frac{k_2 z_2 \sin z_1}{\cos z_1} \right) \left(g + \frac{(lz_2 - \eta_2)z_2}{\cos z_1} \right) \sin z_1 + \\
&+ \frac{\cos z_1 + k_1 l + k_2(2lz_2 - \eta_2) \sin z_1}{(M + m \sin^2 z_1)} u = \bar{f} + \bar{g}u,
\end{aligned}$$

где $\bar{z}_1 = \bar{y}$, а

$$\bar{z}_2 = z_2 + k_1 \frac{lz_2 - \eta_2}{\cos z_1} + k_2 \left(g + \frac{lz_2 - \eta_2}{\cos z_1} z_2 \right) \sin z_1.$$

Используя (14), получим $u = \frac{-\bar{f} - c_1 \bar{z}_2 - c_0 \bar{z}_1}{\bar{g}}$.

Замена переменных $(z, \eta) = \Phi(\theta, \dot{\theta}, x, \dot{x})$ позволяет это управление записать в исходных переменных. Поскольку замена задает диффеоморфизм в области $|\theta| < \frac{\pi}{2}$, то локальная асимптотическая устойчивость сохранится и в исходных переменных.

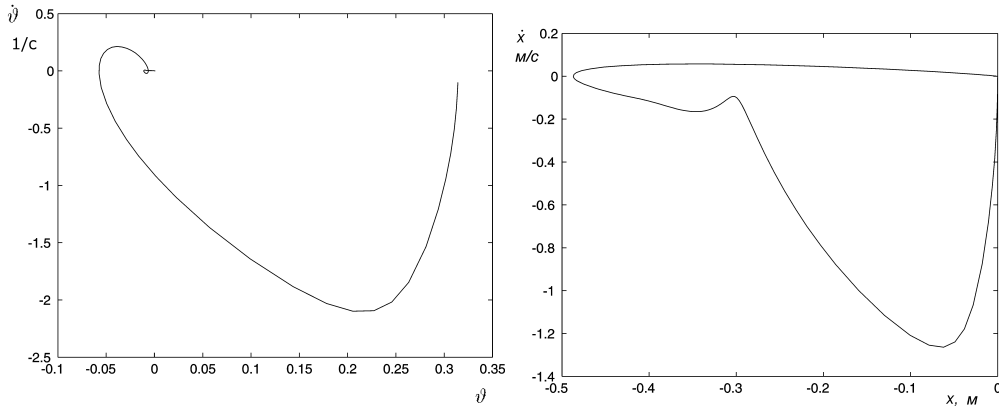


Рис. 2. Стабилизация перевернутого маятника

Численное моделирование выполнялось при $M = 2.0$, $m = 0.1$, $l = 0.5$, $\theta(0) = \frac{\pi}{10}$, $\dot{\theta}(0) = -0.1$, $x(0) = 0.0$, $\dot{x}(0) = 0.0$, $k_1 = -1.5$, $k_2 = 0.25$, $c_1 = 0.75$, $c_0 = 0.125$.

На рис. 2 приведены графики зависимостей $\dot{\theta}(\theta)$ и $\dot{x}(x)$, полученных интегрированием замкнутой системы при $t \in [0, t_k]$, $t_k = 25$ с.

4. Метод виртуальных выходов для систем с векторным управлением

Рассмотрим стационарную аффинную систему с векторным управлением

$$(15) \quad \dot{x} = A(x) + \sum_{i=1}^m B_i(x)u_i,$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u = (u_1, \dots, u_m)^T \in \mathbb{R}^m$, $A(x) = (a_1(x), \dots, a_n(x))^T$, $A(0) = 0$, $B(x) = (B_1(x), \dots, B_m(x))$, $B_j(x) = (b_j^1(x), \dots, b_j^n(x))^T$, $j = \overline{1, m}$, $\text{rang} B(0) = m$, $m \geq 2$, $a_i(x)$, $b_j^i(x) \in C^\infty(\Omega)$, Ω — открытое множество, содержащее положение равновесия $x = 0$.

Рассмотрим векторную функцию $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x))^T$, где $\varphi_i(x) \in C^\infty(\Omega)$, $\varphi_i(0) = 0$, $i = \overline{1, m}$ в качестве m -мерного виртуального выхода аффинной системы (15).

Предположим, что существуют такие числа $\rho_i \geq 1$, $i = \overline{1, m}$, что выполнены следующие два условия:

- 1) при $k < \rho_i - 1$ функции $L_{B_j} L_A^k \varphi_i(x)$, $1 \leq j \leq m$, равны нулю в некоторой окрестности точки $x = 0$;
- 2) матрица

$$(16) \quad A_\rho(x) = \begin{pmatrix} L_{B_1} L_A^{\rho_1-1} \varphi_1(x) & \dots & L_{B_m} L_A^{\rho_1-1} \varphi_1(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ L_{B_1} L_A^{\rho_m-1} \varphi_m(x) & \dots & L_{B_m} L_A^{\rho_m-1} \varphi_m(x) \end{pmatrix}$$

невыврождена в точке $x = 0$. В этом случае кортеж $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_m)$ называют [26] векторной относительной степенью аффинной системы (15) с векторным виртуальным выходом $y = \varphi(x)$ в точке $x = 0$.

Поскольку будут рассматриваться различные виртуальные выходы для одной и той же системы, будем говорить о векторной относительной степени виртуального выхода системы.

Если существует виртуальный m -мерный выход $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x))^T$, при котором относительная степень в точке $x = 0$ равна $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_m)$, $|\rho| \leq n$, и при дополнительном условии инволютивности распределения $G = \text{span}\{B_1, \dots, B_m\}$, порожденного векторными полями B_j , $j = \overline{1, m}$ системы (15), в окрестности точки $x = 0$ существует такая замена переменных [26]

$$(17) \quad z^i = \Phi^i(x), \quad 1 \leq i \leq m, \quad \eta = \Psi(x),$$

где $z^i = (z_1^i, \dots, z_{\rho_i}^i)^T$, $1 \leq i \leq m$, $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_{n-|\rho|})^T$,

$\Phi^i(x) = (\varphi_i(x), L_A \varphi_i(x), \dots, L_A^{\rho_i-1} \varphi_i(x))^T$, $\Phi^i(0) = 0$, $\Psi(0) = 0$, после выполнения которой аффинная система (15) с векторным виртуальным выходом $y = \varphi(x)$ будет записана в нормальной форме

$$(18) \quad \begin{aligned} \dot{z}_1^1 &= z_2^1, \dots, \dot{z}_{\rho_1-1}^1 = z_{\rho_1}^1, \quad \dot{z}_{\rho_1}^1 = f_1(z, \eta) + g_{11}(z, \eta)u_1 + \dots + g_{1m}(z, \eta)u_m, \\ &\dots, \\ \dot{z}_1^m &= z_2^m, \dots, \dot{z}_{\rho_m-1}^m = z_{\rho_m}^m, \quad \dot{z}_{\rho_m}^m = f_m(z, \eta) + g_{m1}(z, \eta)u_1 + \dots + g_{mm}(z, \eta)u_m, \\ \dot{\eta} &= q(z, \eta), \\ y &= (z_1^1, z_1^2, \dots, z_1^m)^T, \end{aligned}$$

где $f_i(0, 0) = 0$, $i = \overline{1, m}$, $q(0, 0) = 0$, $z = (z^{1T}, z^{2T}, \dots, z^{mT})^T$, причем матрица $(g_{ij}(0, 0))_{i,j=\overline{1,m}}$ невырождена.

Системе (18) соответствует система

$$(19) \quad \dot{\eta} = q(0, \eta),$$

которую называют нулевой динамикой. Если ее положение равновесия $\eta = 0$ асимптотически устойчиво, то аффинную систему (15) с векторным выходом $y = \varphi(x)$ называют минимально фазовой (в точке $x = 0$).

Рассмотрим случай однородной векторной степени $(2, \dots, 2)$, следуя [?]. Пусть для системы (15) задан некоторый виртуальный выход

$$(20) \quad \varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x))^T,$$

где $\varphi_i(x) \in C^\infty(\Omega)$, $\varphi_i(0) = 0$, $i = \overline{1, m}$, при котором векторная относительная степень системы (15), (20) в точке $x = 0$ равна $\rho = (2, \dots, 2)$, где $|\rho| = 2m$, т.е. $\rho_i = 2$, $i = \overline{1, m}$.

Пусть распределение $G = \text{span}\{B_1, \dots, B_m\}$ инволютивно. Запишем систему (15), (20) в соответствующей нормальной форме

$$(21) \quad \begin{aligned} \dot{z}_1^1 &= z_2^1, \quad \dot{z}_2^1 = f_1(z, \eta) + g_{11}(z, \eta)u_1 + \dots + g_{1m}(z, \eta)u_m, \\ &\dots, \\ \dot{z}_1^m &= z_2^m, \quad \dot{z}_2^m = f_m(z, \eta) + g_{m1}(z, \eta)u_1 + \dots + g_{mm}(z, \eta)u_m, \\ \dot{\eta} &= q(z, \eta), \\ y &= (z_1^1, z_1^2, \dots, z_1^m)^T, \end{aligned}$$

где $f = (f_1, \dots, f_m)^T$, $f(0, 0) = 0$, $q(0, 0) = 0$, $z = (z_1^1, z_2^1, \dots, z_1^m, z_2^m)^T$.

Будем предполагать, что нормальная форма определена в точке $(z, \eta) = (0, 0)$, а матрица $(g_{ij}(0, 0))_{i,j=\overline{1,m}}$ невырождена.

Для удобства обозначим

$$z^1 = (z_1^1, \dots, z_1^m)^T, \quad z^2 = (z_2^1, \dots, z_2^m)^T, \quad u = (u_1, \dots, u_m)^T.$$

С использованием введенных обозначений нормальная форма (21) запишется в виде

$$(22) \quad \begin{aligned} \dot{z}^1 &= z^2, \quad \dot{z}^2 = f(z^1, z^2, \eta) + g(z^1, z^2, \eta)u, \\ \dot{\eta} &= q(z^1, z^2, \eta), \\ y &= z^1. \end{aligned}$$

Как и в скалярном случае [7], для построения виртуальных выходов будем использовать виртуальные управления $v_i^1(\eta)$, $v_i^2(\eta)$, $i = \overline{1, m}$. Обозначим $v^1(\eta) = (v_1^1(\eta), \dots, v_m^1(\eta))^T$, $v^2(\eta) = (v_1^2(\eta), \dots, v_m^2(\eta))^T$.

Теорема 3. Пусть система (15) с виртуальным выходом φ , $\varphi|_{x=0} = 0$, имеет в точке $x = 0$ векторную относительную степень $\rho = (2, \dots, 2)$, а нулевая динамика асимптотически устойчива. Если в переменных (z, η) нормальной формы (22) $\det \frac{\partial \varphi}{\partial z^1} \Big|_{z=0, \eta=0} \neq 0$, то существуют функции $v^1(\eta)$, $v^2(\eta)$, $v^i(0) = 0$, $i = 1, 2$, стабилизирующие положение равновесия $\eta = 0$ системы

$$(23) \quad \dot{\eta} = q(v^1, v^2, \eta)$$

примет вид

$$(26) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \quad \dot{x}_2 = -(x_7 + 1)g \sin(x_5 + x_8), \\ \dot{x}_3 &= x_4, \quad \dot{x}_4 = (x_7 + 1)g \cos(x_5 + x_8) - g, \\ \dot{x}_5 &= x_6, \quad \dot{x}_6 = (x_7 + 1)g(p_1 \cos(x_8 + \delta_0) + p_2 \sin(x_8 + \delta_0)), \\ \dot{x}_7 &= u_1, \quad \dot{x}_8 = u_2. \end{aligned}$$

Одним из положений равновесия системы (26) является нулевое положение.

Будем строить управление, стабилизирующее положение $(x, y) = (x^0, y^0)$ центра масс вертолета в неподвижной земной системе координат xOy .

Система (26) содержит два управления. Соответственно, выберем два выхода — $y_1 = x_1, y_2 = x_3$, стабилизация нулевых значений которых является одной из целей управления. Для преобразования к нормальной форме сделаем еще одну локальную замену переменных, положив

$$\begin{aligned} z_1^1 &= x_1, \quad z_2^1 = x_2, \quad z_3^1 = -(x_7 + 1)g \sin(x_5 + x_8), \\ z_1^2 &= x_3, \quad z_2^2 = x_4, \quad z_3^2 = (x_7 + 1)g \cos(x_5 + x_8) - g, \\ \eta_1 &= x_5, \quad \eta_2 = x_6. \end{aligned}$$

Построенная локальная замена переменных $(z, \eta) = \Phi(x, \Phi(0) = (0, 0))$, в области $x_7 + 1 > 0$ является гладкой и невырожденной.

Можно видеть, что в нормальной форме, соответствующая выходам $y_1 = z_1^1, y_2 = z_1^2$ подсистема, определяющая нулевую динамику, имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= \eta_2, \\ \dot{\eta}_2 &= (x_7 + 1)g(p_1 \cos(x_8 + \delta_0) + p_2 \sin(x_8 + \delta_0)). \end{aligned}$$

и не является асимптотически устойчивой.

Воспользуемся методом виртуальных выходов для синтеза управления, стабилизирующего систему (26) по всем переменным. Выберем в качестве выходов для системы (26) $y_1 = x_2$ и $y_2 = x_4$ и построим нормальную форму системы (26) с новыми виртуальными выходами. Можно видеть, что векторная относительная степень выбранных выходов равна $\rho = (2, \dots, 2)$.

Замена переменных

$$(27) \quad \begin{aligned} z_1^1 &= x_2, \quad z_2^1 = x_4, \quad z_3^1 = -(x_7 + 1)g \sin(x_5 + x_8), \\ z_2^2 &= (x_7 + 1)g \cos(x_5 + x_8) - g, \\ \eta_1 &= x_1, \quad \eta_2 = x_3, \quad \eta_3 = x_5, \quad \eta_4 = x_6. \end{aligned}$$

невырождена при $x_7 + 1 > 0$. Уравнения, определяющие нулевую динамику, имеют вид

$$(28) \quad \begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= z_1^1, \quad \dot{\eta}_2 = z_2^1, \quad \dot{\eta}_3 = \eta_4, \\ \dot{\eta}_4 &= (x_7 + 1)g(p_1 \cos(x_8 + \delta_0) + p_2 \sin(x_8 + \delta_0)). \end{aligned}$$

Можно видеть, что нулевая динамика полученной системы также неустойчива, однако к ней можно применить сформулированные выше теоремы.

Новые выходы, относительно которых система является минимально фазовой, имеют вид $\varphi_1 = x_2 + k_{11}x_1 + k_{13}x_5$ и $\varphi_2 = x_4 + k_{22}x_3$. Условия, которым должны удовлетворять коэффициенты k_{11}, k_{13} и k_{22} , можно найти в [14]. Часть результатов моделирования приведена на рис. 4.

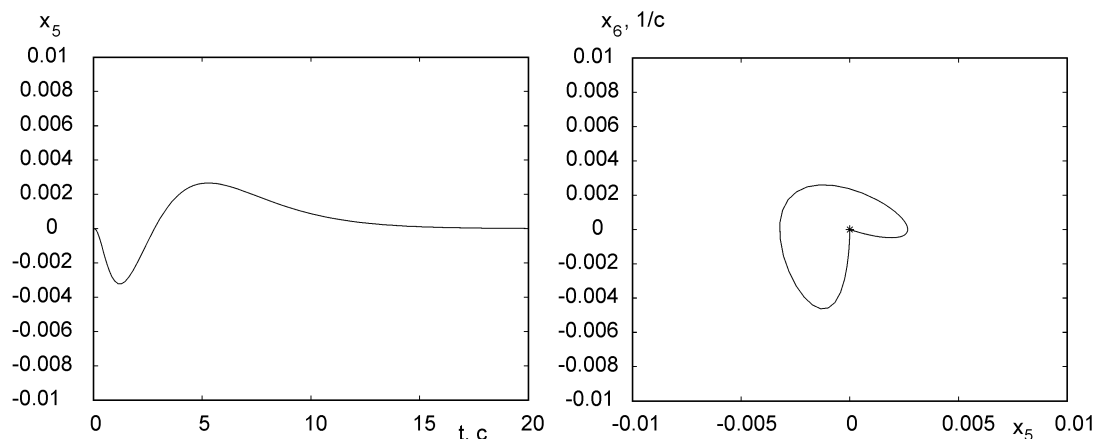


Рис. 4. Стабилизация вертолета

5. Заключение

С использованием метода виртуальных выходов для систем со скалярным и векторным управлением удалось построить стабилизирующие управления для модельных примеров в случаях, когда первоначально рассматриваемые системы не являлись минимально фазовыми. Отметим, что для преобразования динамических систем к нормальным формам, а также для поиска виртуальных выходов целесообразно использовать систему компьютерной алгебры.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (12-07-00329а).

Список литературы

1. Жевнин А.А., Крищенко А.П. Управляемость нелинейных систем и синтез алгоритмов управления // Докл. АН СССР, 1981. Т. 258, № 4. С. 805–809.
2. Ким Д.П. Теория автоматического управления. В 2-х томах. Многомерные, нелинейные и адаптивные системы. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. Т.2. 464 с.
3. Крищенко А.П. Исследование управляемости и множеств достижимости нелинейных систем управления // Автоматика и телемеханика, 1984. № 6. С. 30–36.
4. Крищенко А.П. Стабилизация программных движений нелинейных систем // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1985. № 6. С. 103–112.
5. Крищенко А.П. Преобразование нелинейных систем и стабилизация программных движений // Труды МВТУ им. Н.Э. Баумана, 1988. № 512. С. 69–87.
6. Крищенко А.П. Преобразование многомерных аффинных управляемых систем // Управляемые нелинейные системы, 1991. № 2. С. 5–14.
7. Крищенко А.П., Панфилов Д.Ю., Ткачев С.Б. Построение минимально фазовых аффинных систем // Дифференциальные уравнения, 2002. Т. 38, № 11. С. 1483–1489.
8. Крищенко А.П., Панфилов Д.Ю., Ткачев С.Б. Глобальная стабилизация аффинных систем с помощью виртуальных выходов // Дифференциальные уравнения, 2003. Т. 39, № 11. С. 1503–1510.
9. Output maps with associated asymptotically stable zero dynamics / A.P. Krishchenko, D.U. Panfilov, K.E. Starkov, S.B. Tkachev // Nonlinear Control Systems'04: Proc. of VI IFAC Symp. Stuttgart, 2004. Vol. 1. P. 329–334.
10. Краснощеченко В.И., Крищенко А.П. Нелинейные системы: геометрические методы анализа и синтеза. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. 520 с.

11. Ткачев С.Б. Стабилизация нестационарных аффинных систем методом виртуальных выходов // Дифференциальные уравнения, 2007. Т. 43, № 11. С. 1507–1517.
12. Ткачев С.Б. Стабилизация неминимально фазовых аффинных систем с использованием линеаризации по части переменных // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн., 2011. № 11. Режим доступа: <http://technomag.edu.ru/doc/255087.html> (дата обращения: 10.01.2013)
13. Ткачев С.Б. Стабилизация неминимально фазовых аффинных систем с векторным управлением // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2012. № 9. С. 121–134. Режим доступа: <http://technomag.edu.ru/doc/450613.html> (дата обращения 10.01.2013) DOI:<http://dx.doi.org/10.7463/0812.0450613>
14. Ткачев С.Б. Стабилизация беспилотного вертолета методом виртуальных выходов // Нелинейная динамика и управление. Сборник статей. ФИЗМАТЛИТ. 2013. Вып. 8. С. 287–302.
15. Allgower F., Doyle III F.J. Approximate input-output linearization of nonlinear systems // Nonlinear model-based process control. Ed. by Barber R., Kravaric C. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998. P. 235–274.
16. Brockett R.W. Feedback invariants for nonlinear systems // Preprints of VII World Congress IFAC. Oxford: Pergamon Press, 1978. Vol. 2. P. 1115–1120.
17. Byrnes C., Isidori A. A frequency domain philosophy for nonlinear system with application to stabilization and to adaptive control // Proc. of the 23rd IEEE Conf. Decision Contr. Las Vegas, 1985. P. 1031–1037.
18. Byrnes C., Isidori A. Local stabilization of minimum phase nonlinear system // Syst. Contr. Lett., 1988. Vol. 11. P. 9–17.
19. Byrnes C., Isidori A. New results and examples in nonlinear feedback stabilization // Syst. Contr. Lett., 1989. Vol. 12. P. 437–442.
20. Byrnes C., Isidori A. Asymptotic stabilization of minimum phase nonlinear systems // IEEE Trans. Automat. Contr., 1991. No. 10. P. 1122–1137.
21. Byrnes C., Isidori A., Willems J. Passivity, feedback equivalence and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems // IEEE Trans. Automat. Contr., 1992. Vol. 37. P. 1004–1017.
22. Hauser J., Sastry S., Meyer G. Nonlinear control design for slightly non-minimum phase systems: application to V/STOL aircraft // Automatica, 1992. Vol. 28, No. 4. P. 665–679.
23. Hunt L.R., Su R., Meyer G. Design for multiinput nonlinear systems // Diff. Geometric Control Theory. Boston: BirkHauser, 1983. P. 24–30.
24. Isidori A., Moog C., De Luca A. A sufficient condition for full linearization via dynamic feedback // Proc. of the 25th IEEE Conf. Decision Contr., Atlanta, 1986. P. 203–208.
25. Isidori A., Moog C. On the nonlinear equivalent of the notion of transmission zeros // Modeling and Adaptive Control. New York, 1988. P. 203–208.
26. Isidori A. Nonlinear control systems. London: Springer-Verlag, 1995. 587 p.
27. Fantoni I., Lozano R. Non-linear control for underactuated mechanical systems. London: Springer-Verlag, 2002. 295 p.
28. Jacubczyk B., Respondek W. On linearization of control systems // Bul. L'acad Pol. Science, 1980. Vol. 28., No. 9-10. P. 517–522.
29. Kravaris C., Mousavere D. ISE-optimal nonminimum-phase compensation for nonlinear processes // Journal of Process Control, 2007. Vol. 17, No. 5. P. 453–461.
30. Krener A., Isidori A. Nonlinear zero distributions // Proc. of the 19th IEEE Conf. Decision Contr. Atlanta, 1980. P. 665–668.
31. Khalil H.K. Nonlinear systems. 3-d edition. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 2002. 750 p.
32. Niemiec P. M., Kravaris C. Nonlinear model-state feedback control for nonminimum-phase processes // Automatica, 2003. Vol. 39, No. 7. P. 1295–1302.
33. Teel A.R. Semi-global stabilization of minimum-phase nonlinear systems in special normal forms // Syst. Cont. Letters., 1992. No. 3. P. 187–192.
34. Tornambe A. Output feedback stabilization of a class of non-minimum phase nonlinear systems // Syst.& Cont. Letters, 1992. No. 3. P. 193–204.
35. Su R. On the linear equivalents of nonlinear systems // Syst.& Cont. Letters, 1982. No. 1. P. 48–52.
36. Wright R. A., Kravaris C. Nonminimum-phase compensation for nonlinear processes // AIChE Journal, 1992. Vol. 38, No. 1. P. 26–40.
37. Zou Q., Devasia S. Precision preview-based stable-inversion for nonlinear nonminimum-phase systems: The VTOL example // Automatica, 2007. No. 1. P. 117–127.